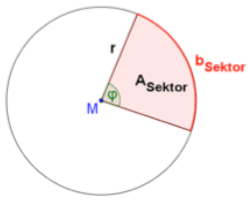
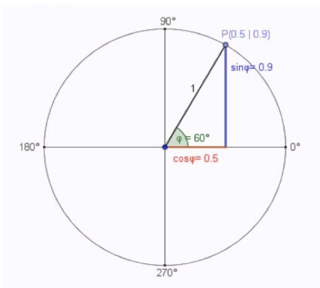
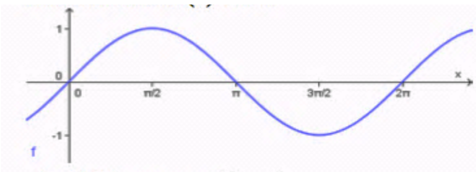
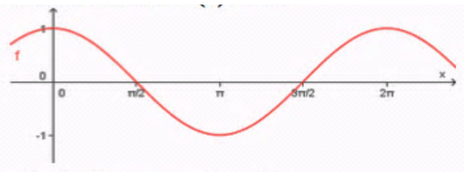
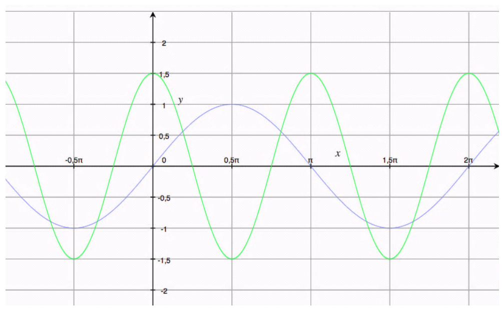
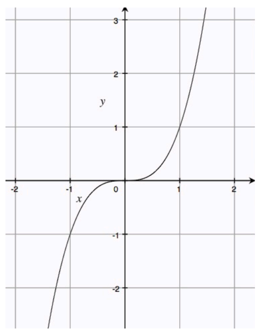
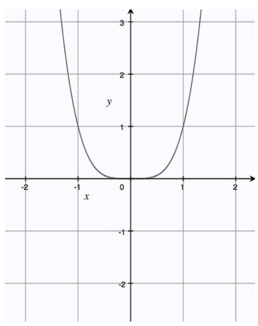
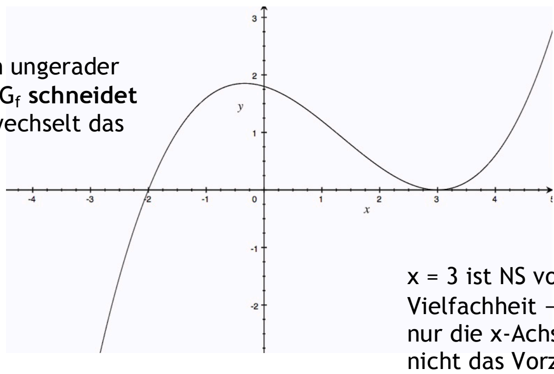
| Themen | Eigenschaften - Besonderheiten - Beispiele |
|---|---|
| **Kreis**<br><br>**Kreissektor**<br><br>**Bogenlänge b**<br>**Flächeninhalt** | bekannt aus Klasse 8:<br>$U_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot r$ $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$<br><br>Kreissektor:<br>Die Länge b des Kreisbogens und der Flächeninhalt $A_S$ sind proportional zum Mittelpunktswinkel $\varphi$.<br>$A_S = \frac{\varphi}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$ $b = \frac{\varphi}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi$ |
| **Kugel** | Volumen der Kugel: $V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$<br>Oberfläche der Kugel: $O_{Kugel} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ |
| **Bogenmaß** | **Bogenmaß:**<br>Das Bogenmaß x eines Winkels $\varphi$ ist die Länge des zugehörigen Kreisbogens im Einheitskreis (Kreis mit r =1).<br>$x = \frac{\varphi}{360°} \cdot 2\pi$<br>Wichtige Werte: $360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$, $180° \mathrel{\hat{=}} \pi$, $90° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2}$, $45° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4}$, $30° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{6}$ |
| **Sinus und Kosinus am Einheitskreis**<br> | Ein Punkt P, der auf dem Einheitskreis liegt, hat die Koordinaten x = $\cos\varphi$ und y = $\sin\varphi$.<br>$\varphi$ ist hierbei der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Halbgeraden vom Ursprung durch P.<br>Die Werte von Sinus und Kosinus für beliebige Winkel lassen sich aus den Werten im I. Quadranten herleiten.<br>Beispiele:<br>$\cos 210° = -\cos(210° - 180°) = -\cos 30° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$<br>$\sin 225° = -\sin(225° - 180°) = -\sin 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| **Berechnungen in <u>allgemeinen</u> Dreiecken:**<br>**Sinussatz** | In jedem beliebigen Dreieck ABC verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:<br>$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ; $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ ; $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ |
| **Kosinussatz** | In jedem beliebigen Dreieck gilt:<br>$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$<br>$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$<br>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ |

| | |
|---|---|
| **Trigonometrische Funktionen**<br>**f(x) = sin x**<br>**f(x) = cos x** | Trägt man in einem Koordinatensystem auf der waagrechten Achse das Bogenmaß eines Winkels x und auf der senkrechten Achse seine Sinus- bzw. Kosinuswerte ab, so erhält man den Graphen der beiden trigonometrischen Grundfunktionen:<br>f(x) = sinx  f(x) = cosx <br>Gemeinsamkeiten: Definitionsmenge IR<br>Wertemenge [ –1 ; 1 ]<br>periodisch mit Periode $2\pi$<br>Unterschiede:<br>punktsymmetrisch zum Ursprung — achsensymmetrisch zur y-Achse |
| **Allgemeine Sinusfunktion** | Den Graphen der allgemeinen Sinusfunktion<br>$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$<br>kann man sich so aus dem Graphen von $x \mapsto \sin x$ entstanden denken:<br>• **a** bewirkt eine Streckung/Stauchung in y-Richtung, d.h. eine Veränderung der Amplitude zu $\lvert a \rvert$;<br>• **b** bewirkt eine Streckung/Stauchung in x-Richtung, d.h. eine Veränderung der Periode zu $2\pi/b$;<br>• **c** bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung;<br>• **d** bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung; |
| **Allgemeine Sinusfunktion Beispiel** | $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 1{,}5 \cdot \sin(2 \cdot (x + \frac{\pi}{4}))$<br>Den Graphen $G_f$ erhält man, indem man sinx<br>• um **c** = $\pi/4$ nach links verschiebt<br>• um **b** = 2 staucht (neue Periode $\pi$)<br>• um **a** = 1,5 streckt;<br><br>*vergleiche auch „Verschieben von Funktionsgraphen“* |
| **Potenzfunktionen** | Funktionen der Form $y = x^n$ mit $n \in$ IN nennt man Potenzfunktionen.<br>Exponent ungerade  Exponent gerade  |

| | |
|---|---|
| **Ganzrationale Funktionen** | Terme wie z.B. $3x^4 - 2x^2 + x - 4$, die aus Summen von Potenzen derselben Variablen und zugehörigen Koeffizienten bestehen, nennt man **Polynome**.<br>Der höchste in einem Polynom bei einer Variable vorkommende Exponent heißt **Grad des Polynoms**.<br>Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$, deren Term ein Polynom ist, heißt **ganzrationale Funktion** oder **Polynomfunktion**. |
| **Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen** | Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.<br>Zu jeder Nullstelle $x_0$ gehört der Linearfaktor $(x - x_0)$. Die Division des zur ganzrationalen Funktion gehörenden Polynoms durch den Linearfaktor geht sicher auf. |
| **Polynomdivision** | Beispiel: Finde NS von $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$<br>eine Nullstelle erraten: hier $x_1 = 1$ $\rightarrow$ Linearfaktor: $(x - 1)$<br>$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$ $\rightarrow$ $f(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 - x - 6)}_{=0}$<br>$-(x^3 - x^2)$<br>$\quad -x^2 - 5x$<br>$\quad -(-x^2 + x)$<br>$\qquad -6x + 6$<br>$\qquad -(-6x + 6)$<br>$\qquad\quad 0$<br>$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6)}}{2}$<br>$x_2 = 3$ ; $x_3 = -2$<br>$f(x) = \underbrace{(x-1)(x-3)(x+2)}_{\text{Linearfaktorzerlegung von f}}$ |
| **Biquadratische Terme** | $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 12$ $\rightarrow$ Substitution: $z = x^2$<br>$\rightarrow$ $f(z) = 2z^2 - 2z - 12$ $\rightarrow$ $z = 3$ und $z = -2$<br>Rücksubstitution: $x^2 = 3$ und $x^2 = -2$<br>$x = \pm\sqrt{3}$ und keine weiteren NS |
| **Vielfachheit von Nullstellen** | Liegt eine Polynomfunktion bereits in faktorisierter Form, also als Produkt von Linearfaktoren vor, so unterscheidet man zwischen Nullstellen von ungerader und von gerader Vielfachheit, je nachdem wie oft der zugehörige Linearfaktor in der Linearfaktorzerlegung des Funktionsterms vorkommt.<br>Beispiel:<br>x = -2 ist NS von ungerader Vielfachheit $\rightarrow$ $G_f$ **schneidet** die x-Achse, f wechselt das Vorzeichen;<br><br>x = 3 ist NS von gerader Vielfachheit $\rightarrow$ $G_f$ **berührt** nur die x-Achse, f wechselt nicht das Vorzeichen; |

| | |
|---|---|
| **Exponentialfunktion** | Funktionen der Form $f \mapsto b \cdot a^x$ mit $x \in IR$ heißen Exponentialfunktionen.<br>Die Konstante a gibt den Wachstumsfaktor an ($a > 0$; $a \neq 1$).<br>Die Konstante b gibt den Anfangswert der Funktion für x = 0 an.<br><br>Für a > 1 ist der Graph monoton steigend (exponentielles Wachstum), für 0<a<1 ist der Graph monoton fallend (exponentielle Abnahme).<br><br>Anwendungsbeispiele:<br>a) **Exponentielles Wachstum**: Eine Bakterienkultur von anfänglich 1000 Bakterien wächst stündlich um 20% : $f: t \mapsto 1000 \cdot 1{,}2^t$<br>b) **Exponentielle Abnahme**: In einer Zellkultur mit anfangs 200 Zellen sterben die Zellen mit einer Halbwertszeit von 3 Tagen ab:<br>$$f: t \mapsto 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$$ |
| **Logarithmus** | Der Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialrechnung, d.h.<br>Die Lösung der Gleichung $a^x = u$ ist<br>$x = \log_a u$ („Logarithmus von u zur Basis a“)<br>**Beispiel:** $\log_4 64 = 3$ da $4^3 = 64$<br>**Regeln für das Rechnen mit Logarithmen:**<br>$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$<br>$\log_a(b : c) = \log_a b - \log_a c$<br>$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$<br>**Umrechnungsformel:**<br>$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$ Basiswechsel, z.B. für das Rechnen mit TR<br>(Taste log $\hat{=} \log_{10}$ , Taste ln $\hat{=} \log_e$!) |
| **Exponential-gleichungen** | Gleichungen, bei denen die Unbekannte x nur im Exponenten vorkommt, heißen Exponentialgleichungen. |
| **Lösen von Exponen-tialgleichungen**<br>**Substitution** | Substitution: $10 \cdot 2^x - 9 = 2^{2x} \rightarrow 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 9 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 9 = 0$<br>$z = 2^x$: $\rightarrow z^2 - 10z + 9 = 0 \rightarrow$ z = 9 und z = 1<br>Rücksubstitution: $9 = 2^x \rightarrow x = \log_2 9$<br>$1 = 2^x \rightarrow x = \log_2 1 = 0$ |
| **Potenzgesetze** | Anwenden von Potenzgesetzen:<br>$6^x \cdot 5 = 2^x \cdot 4 \rightarrow \frac{6^x}{2^x} = \frac{4}{5} \rightarrow 3^x = 0{,}8 \rightarrow x = \log_3 0{,}8$ |
| **Logarithmusregeln** | Anwenden von Logarithmusregeln:<br>$2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 2^{-x} \rightarrow \log(2 \cdot 3^{2x}) = \log(5 \cdot 2^{-x}) \rightarrow \log 2 + \log(3^{2x}) = \log 5 + \log(2^{-x})$<br>$\log 2 + 2x \cdot \log 3 = \log 5 + (-x) \cdot \log 2 \rightarrow 2x \cdot \log 3 + x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 2$<br>$x \cdot (2 \cdot \log 3 + \log 2) = \log 5 - \log 2 \rightarrow x = \frac{\log 5 - \log 2}{2\log 3 + \log 2}$ |

**Zusammengesetzte Zufallsexperimente**

Betrachtet man zwei Ereignisse eines Zufallsexperiments, so sind für deren gemeinsame Darstellung die sogenannte Schnitt- bzw. Vereinigungsmenge hilfreich.

A={Lena, Sophie, Alex, Tom}
B={Lena, Kathrin, Tom}

**Schnittmenge:** $A \cap B = \{Lena, Tom\}$ **„A und B"**

**Vereinigungsmenge:** $A \cup B = \{Lena, Tom, Sophie, Kathrin, Alex\}$ **„A oder B"**

**Mehrstufige Zufallsexperimente**

Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Teilexperimenten besteht, nennt man mehrstufiges Zufallsexperiment.

**Vierfeldertafel**

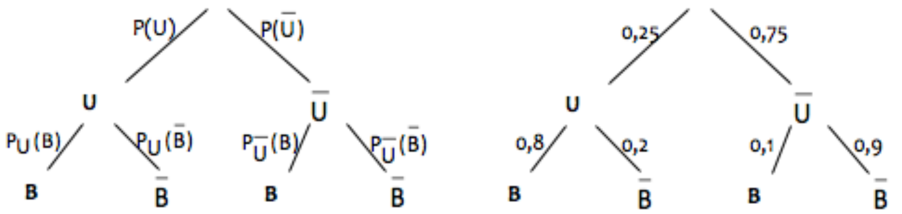
In der Vierfeldertafel lassen sich die Wahrscheinlichkeiten anschaulich darstellen:

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(A \cap B)$ | $P(\overline{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| $\overline{B}$ | $P(A \cap \overline{B})$ | $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $P(\overline{B})$ |
| | $P(A)$ | $P(\overline{A})$ | 1 |

**Baumdiagramm**

Eine andere Veranschaulichung ist das Baumdiagramm.
Vorteile des Baumdiagramms sind: leichte Bestimmung der Mächtigkeit von $\Omega$ und übersichtliche Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten mithilfe der **Pfadregeln**.

Beispiel: Bei Lehrer Müller kommt es in einer Unterrichtsstunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% zu einer Unterrichtsstörung. Im Falle einer Unterrichtsstörung erhöht sich der Blutdruck von Lehrer Müller mit 80% Wahrscheinlichkeit. Jedoch kommt es bei der Lehrkraft auch ohne Unterrichtsstörung mit 10% Wahrscheinlichkeit zu erhöhtem Blutdruck.




**Bedingte Wahrscheinlichkeit**

Sind A und B zwei Ereignisse eines Zufallsexperiments, so versteht man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt, wenn man bereits weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist. Es gilt:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Beispiel:
In einer Urne liegen 3 rote und 5 schwarze Kugeln. Man zieht zwei Kugeln nacheinander, **ohne** die erste Kugel wieder zurückzulegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man beim zweiten Mal eine schwarze Kugel, wenn man beim ersten Zug eine rote Kugel gezogen hat?

$$P_{\text{rote Kugel beim ersten Ziehen}}(\text{schwarze Kugel beim zweiten Ziehen}) = \frac{5}{7}$$

**Verschieben von Funktionsgraphen**

Viele Funktionsgraphen kann man sich aus anderen Graphen hervorgegangen vorstellen. Falls der Graph $G_f$ der Funktion f bekannt ist, so gilt für die Graphen

- $G_{f_1}$ mit $f_1(x) = f(x) + d$ geht aus $G_f$ hervor durch Verschiebung von $G_f$ um d in y-Richtung;
- $G_{f_2}$ mit $f_2(x) = f(x - c)$ geht aus $G_f$ hervor durch Verschiebung von $G_f$ um c in x-Richtung;
- $G_{f_3}$ mit $f_3(x) = a \cdot f(x)$ geht aus $G_f$ hervor durch Streckung/Stauchung von $G_f$ in y-Richtung;
- $G_{f_4}$ mit $f_4(x) = f(b \cdot x)$ geht aus $G_f$ hervor durch Streckung/Stauchung von $G_f$ in x-Richtung;

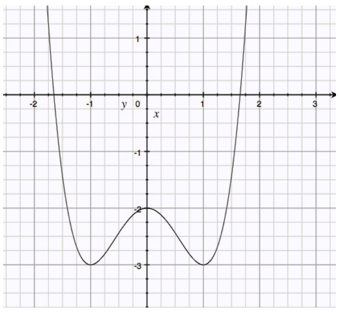
*vergleiche auch „allgemeine Sinusfunktion“*

**Sonderfälle:**

- a = –1, d.h. $f_3(x) = -f(x)$: $G_{f_3}$ geht aus $G_f$ durch Spiegelung an der x-Achse hervor;
- b = –1, d.h. $f_4(x) = f(-x)$: $G_{f_4}$ geht aus $G_f$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor;

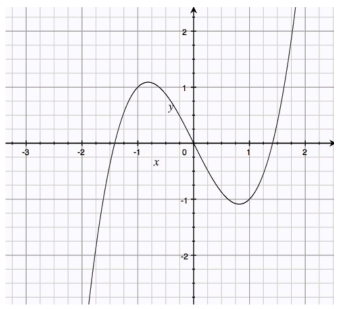
**Symmetrie von Funktionsgraphen**

$G_f$ ist symmetrisch zur y-Achse



$f(-x) = f(x)$

$G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung



$f(-x) = -f(x)$

**Verhalten im Unendlichen**

Nähern sich die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ gegen einen feste Zahl a, so heißt die Funktion **konvergent** gegen a. Die Zahl a heißt Grenzwert der Funktion a im Unendlichen.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

**Berechnen von Grenzwerten**

- bei ganzrationalen Funktionen: **Ausklammern der höchsten Potenz**

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 4x^2 + 1) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^3}_{\to+\infty} \underbrace{(1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0})}_{\to 1} = +\infty$$

- bei gebrochen-rationalen Funktionen: **Ausklammern der höchsten Nennerpotenz und Kürzen des Bruchterms**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{1 + 2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x^2} + 2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{(1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0})}^{\to 1}}{\underbrace{(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + 2)}_{\to 2}} = \frac{1}{2}$$