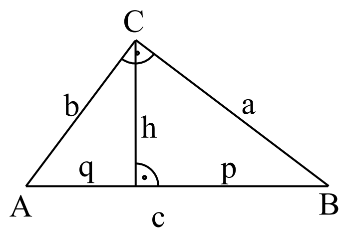
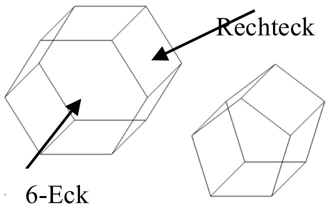
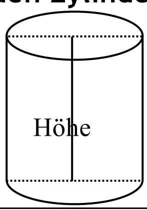
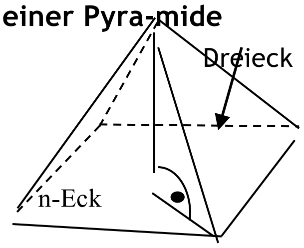
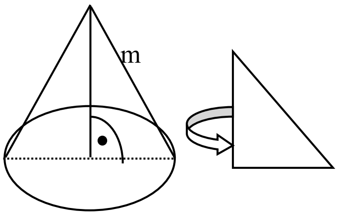
Themen	Eigenschaften - Besonderheiten - Beispiele
Erweiterung des Zahlenbereichs	Jede rationale Zahl a kann als Bruch geschrieben werden: $a = \frac{p}{q}$ Dieser Bruch stellt entweder eine ganze Zahl, einen endlichen Dezimalbruch oder einen unendlich periodischen Dezimalbruch dar: $\frac{12}{3} = 4 \qquad -\frac{5}{8} = -0{,}625 \qquad \frac{25}{11} = 2{,}\overline{27}$ Unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche können nicht als Bruch dargestellt werden; solche Zahlen heißen **irrational**.
reelle Zahlen	Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die **Menge IR der reellen Zahlen**. **Bekannte Zahlenmengen**: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle\| p \in Z; q \in IN\right\}$ Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
Quadratwurzeln	Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a}$ diejenige **nicht-negative** Zahl, die einmal mit sich selbst multipliziert a ergibt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ Die Zahl unter der Wurzel heißt Radikand. **Beachte**: $\sqrt{5^2} = 5$, aber: $\sqrt{(-5)^2} \neq -5$, denn: $\sqrt{a}$ ist nicht negativ! stattdessen gilt: $\sqrt{(-5)^2} = \|-5\| = 5$
Rechenregeln für Quadratwurzeln	Für alle Zahlen a, b ≥ 0 gilt: Produktregel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ Bsp.: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{24}$ Quotientenregel: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ mit $b \neq 0$ Bsp.: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$ **Beachte:** es gibt keine Summen- und Differenzregel! $\sqrt{100} + \sqrt{25} \neq \sqrt{125}$, denn: $\sqrt{100} + \sqrt{25} = 10 + 5 = 15$ $\sqrt{9} - \sqrt{4} \neq \sqrt{9-4}$, denn: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$
Rechnen mit Wurzeln	Teilweises Radizieren: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ Rationalmachen des Nenners: $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ Ausklammern bei Summen und Differenzen: $5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (5-2)\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$ $\sqrt{16x^2 - 4} = \sqrt{4(4x^2 - 1)} = 2\sqrt{4x^2 - 1}$ **Beachte:** $\sqrt{16x^2 - 4} \neq 4x - 2$

Binomische Formeln	1. Binomische Formel (Plusformel): $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Beispiel: $(3+x)^2 = 9 + 6x + x^2$ 2. Binomische Formel (Minusformel): $(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Beispiel: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ 3. Binomische Formel (Plus-Minus-Formel): $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ Beispiel: $(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
Anwenden bei Wurzeln und Quadraten	Ausmultiplizieren: $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{5}^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 = 8 - 2\sqrt{15}$ Faktorisieren: $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x+5) \cdot (3x-5)$ Quadratisch ergänzen: $x^2 - 6x + 3 = x^2 - 6x \overset{\boxed{(6:2)^2 = 9}}{+ 9 - 9} + 3 = \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 3 = (x-3)^2 - 6$ Radizieren: $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = \lvert x+2 \rvert$
Wurzelgleichungen	Eine Gleichung, bei der die Unbekannte x im Radikanden einer Wurzel vorkommt, nennt man Wurzelgleichung. Beispiel: $\sqrt{2x-3} - 5 = 0$ Lösungsverfahren für Wurzelgleichungen: • Bestimme die Definitionsmenge der Gleichung: $D = [1{,}5;\ \infty[$ • Bringe den Wurzelterm allein auf eine Seite: $\sqrt{2x-3} = 5$ • Quadriere beide Seiten der Gleichung: $2x - 3 = 25$ • Löse die wurzelfreie Gleichung nach x auf: $x = 14$ • Mache die Probe: $\sqrt{2 \cdot 14 - 3} - 5 = \sqrt{25} - 5 = 0$
Allgemeine Wurzeln	Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige **nicht negative** Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert a ergibt: $\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n\text{-mal}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ Beispiele: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$; $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$; **Beachte:** Jede Wurzel kann auch als Potenz umgeschrieben werden: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
Potenzgesetze	Potenzen multiplizieren: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ gleiche Basis $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ gleicher Exponent Potenzen dividieren: $a^m : a^n = a^{m-n}$ gleiche Basis $a^m : b^m = (a : b)^m$ gleicher Exponent Potenzen potenzieren: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
	Beachte: $a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Lineare Funktionen	Lineare Funktionen**: y= f(x) = mx + t** Beispiel: $y = 2x + 3$ ist eine Gerade mit Steigung $m = 2$ und y-Abschnitt bei $t = +3$ liegt, d.h. die Gerade ist um 3 Einheiten in y-Richtung nach oben verschoben;
Quadratische Funktionen **Graphen quadratischer Funktionen**	Quadratische Funktionen: $y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$ • Parabel mit Scheitelpunkt S(x/y) und maximal zwei Nullstellen • für a =1 erhält man die sogenannte Normalparabel • für a < 0 ist die Parabel nach unten geöffnet.
Quadratische Gleichung **Allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen**	Das Lösen quadratischer Gleichungen benötigt man insbesondere für die Nullstellensuche bei quadratischen Funktionen. D.h. man nimmt den Funktionsterm und setzt ihn gleich Null: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ Lösungsformel ("Mitternachtsformel") $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ • Der Term unter der Wurzel heißt Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ • D bestimmt, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung bzw. wie viele Nullstellen die zugehörige Parabel hat: D < 0 : keine Lösung (bzw. keine Nullstelle) D = 0: eine Lösung (bzw. eine Nullstelle) D > 0: zwei Lösungen (bzw. zwei Nullstellen)
Rechtwinkliges Dreieck	 • $[AC]$ und $[BC]$ sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC; • sie schließen den rechten Winkel ein; • die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt Hypotenuse;
Kathetensatz **Höhensatz** **Satz des Pythagoras**	**Kathetensatz** Die Fläche des Quadrates über einer **Kathete** ist gleich der Fläche des anliegenden Hypotenusenrechtecks. $\boxed{a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q}$ **Höhensatz** Die Fläche des Quadrates über der **Höhe** ist gleich der Fläche des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten. $\boxed{h^2 = p \cdot q}$ **Satz des Pythagoras** Die Summe der Fläche der beiden Kathetenquadrate ist gleich der Fläche des Hypotenusenquadrats. $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Berechnung fehlender Größen am rechtwinkligen Dreieck	Beispiel: $c = 7$ cm, $q = 0{,}04$m $b^2 = c \cdot q \Rightarrow b = \sqrt{7 \cdot 4} = 2\sqrt{7}$ [cm] $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{49 - 28} = \sqrt{21}$ [cm] $c = p + q \Rightarrow p = 7 - 4 = 3$ [cm]
Satz und Kehrsatz	Vertauscht man Voraussetzung und Behauptung eines Satzes, so erhält man seinen Kehrsatz. Beinhaltet der Satz eine wahre mathematische Aussage, so kann dies, muss aber **nicht** für den Kehrsatz gelten. Die Umkehrung des Satzes von Pythagoras ist allerdings auch eine wahre Aussage.
Umkehrung des Satzes von Pythagoras	Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig. Beispiel: $c = 5$ cm, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm Es gilt: $5^2 = 3^2 + 4^2$ $25 = 9 + 16$ $\Rightarrow$ das Dreieck ist rechtwinklig
Netz, Oberflächeninhalt und Volumen des geraden Prismas 	Ein gerades Prisma ist ein geometrischer Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten n-Ecken als Grund –und Deckfläche sowie von n zu Grund- und Deckfläche senkrechten Rechtecken als Seitenflächen begrenzt wird. $V_{Prisma} = G \cdot h_{Körper}$ $O_{Prisma} = 2 \cdot G + M$ M ist die Mantelfläche und besteht aus der entsprechenden Anzahl von Rechtecken.
Netz, Oberflächeninhalt und Volumen des geraden Zylinders 	$V_{Zylinder} = G \cdot h$ G ist eine Kreisfläche: $A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$ $O_{Zylinder} = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot rh$ Der Mantel ist abgewickelt ein Rechteck der Länge $2\pi r$ (=Umfang des Kreises) und der Breite h (Körperhöhe).
Netz, Oberflächeninhalt und Volumen einer Pyra-mide 	Eine Pyramide ist ein geometrischer Körper, mit einem n-Eck als Grundfläche, dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die alle einen Punkt gemeinsam haben, die Spitze der Pyramide. Die Dreiecke bilden die Mantelfläche. Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt Höhe. $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h_{Pyramide}$ $O_{Pyramide} =$ Grundfläche + Außenflächen

Netz, Oberflächeninhalt und Volumen eines Kegels

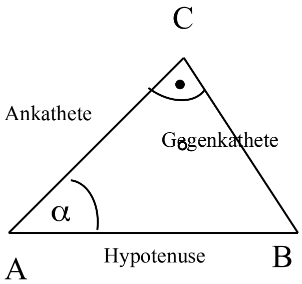


Ein gerader Kreiskegel ist ein geometrischer Körper, der durch die Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten entsteht.

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$O_{Kegel} = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{Kreisfläche= Grundfläche}} + \underbrace{\pi \cdot r \cdot m}_{\text{Kreissektor}} \quad \text{mit Mantellinie } m = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Trigonometrie



In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die einem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete **Gegenkathete**, die dem Winkel anliegende Kathete **Ankathete**. Jedem spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck wird ein Seitenverhältnis zugeordnet.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Komplementbeziehungen:

$\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$

$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$

Trigonometrischer Pythagoras:

$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$

Zufallsexperimente

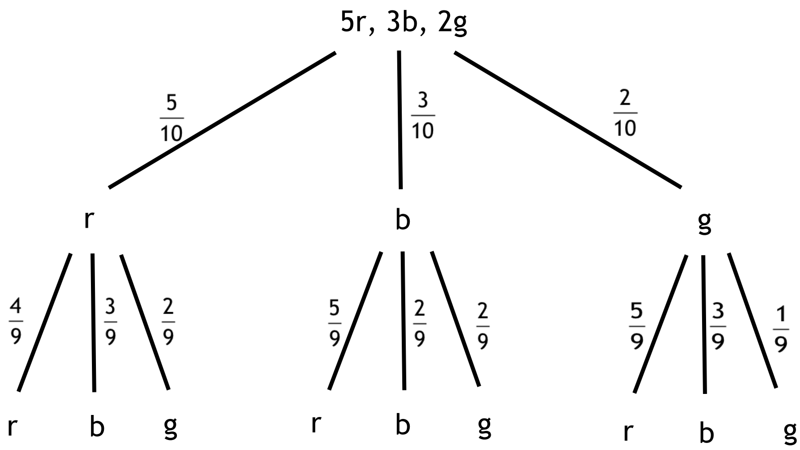
Zufallsexperimente, bei denen mehrere Teilexperimente nacheinander ausgeführt werden, bezeichnet man als zusammengesetzte Zufallsexperimente oder auch als mehrstufige Zufallsexperimente.

Beispiel:
mehrmaliges Ziehen aus einer Urne, Werfen zweier Würfel,…

Baumdiagramm

Solche zusammengesetzten Zufallsexperimente und deren Ergebnisse lassen sich am leichtesten man in einem Baumdiagramm darstellen.

Beispiel:
2-maliges Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 5 roten, 3 blauen und 2 grünen Kugeln:



1. Pfadregel	1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu dem Ergebnis führt. Beispiel: Die 1. Kugel ist rot und die 2.Kugel ist blau. $P(\{rb\}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$
2. Pfadregel	2.Pfadregel Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis führen. Beispiel: Eine Kugel ist rot und eine Kugel ist grün $P(\{rg, gr\}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$